

Álgebra Relacional

Fernando Lobo

Base de Dados, Universidade do Algarve

Álgebra relacional

Conjunto de operadores que permitem manipular relações:

- 1 operações sobre conjuntos: \cup , \cap , $-$
- 2 remover linhas (selecção), remover colunas (projecção).
- 3 operações que combinam informação contida em várias relações: produtos cartesianos e joins.
- 4 mudar o nome a relações e atributos.

As expressões em álgebra relacional são uma espécie de programa.

Operações sobre conjuntos: União (\cup)

Filmes₁

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Pocahontas	1998	Disney
King Kong	1933	MGM
Lion King	1997	Disney

Filmes₂

nome	ano	estúdio
Indiana Jones	1981	Universal
King Kong	1933	MGM
Pocahontas	1998	Disney

Filmes₁ \cup Filmes₂

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Pocahontas	1998	Disney
King Kong	1933	MGM
Lion King	1997	Disney
Indiana Jones	1981	Universal

Operações sobre conjuntos: Intersecção (\cap)

Filmes₁

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Pocahontas	1998	Disney
King Kong	1933	MGM
Lion King	1997	Disney

Filmes₂

nome	ano	estúdio
Indiana Jones	1981	Universal
King Kong	1933	MGM
Pocahontas	1998	Disney

Filmes₁ \cap Filmes₂

nome	ano	estúdio
Pocahontas	1998	Disney
King Kong	1933	MGM

Operações sobre conjuntos: Diferença (–)

Filmes₁:

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Pocahontas	1998	Disney
King Kong	1933	MGM
Lion King	1997	Disney

Filmes₂:

nome	ano	estúdio
Indiana Jones	1981	Universal
King Kong	1933	MGM
Pocahontas	1998	Disney

Filmes₁ – Filmes₂

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Lion King	1997	Disney

Operações sobre conjuntos

- **NOTA:** Quando se aplica operadores sobre conjuntos, as relações têm de ter esquemas relacionais idênticos.
- ... e a lista de atributos de cada relação têm de aparecer pela mesma ordem.
- caso contrário estes operadores não fazem sentido.

Remover linhas: Selecção (σ)

Notação: $\sigma_c(R)$, onde c é uma condição.

Filmes

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Pocahontas	1998	Disney
King Kong	1933	MGM
Lion King	1997	Disney

$\sigma_{\text{estúdio} = \text{'Disney'}}(\text{Filmes})$

nome	ano	estúdio
Pocahontas	1998	Disney
Lion King	1997	Disney

Remover colunas: Projecção (π)

Notação: $\pi_{\ell} (R)$, onde ℓ é uma lista de atributos de R .

Filmes

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Pocahontas	1998	Disney
King Kong	1933	MGM
Lion King	1997	Disney

$\pi_{\text{nome, estúdio}} (\text{Filmes})$

nome	estúdio
Star Wars	Fox
Pocahontas	Disney
King Kong	MGM
Lion King	Disney

Outro exemplo

Filmes

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Pocahontas	1998	Disney
King Kong	1933	MGM
Lion King	1997	Disney

π estúdio (Filmes)

estúdio
Fox
Disney
MGM

Seleccção e projecção juntos

Filmes

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Pocahontas	1998	Disney
King King	1933	MGM
Lion King	1997	Disney

$\pi_{\text{nome, ano}} \left(\sigma_{\text{ano} < 1990} (\text{Filmes}) \right)$

nome	ano
Star Wars	1977
King Kong	1933

Combinar relações

Produto Cartesiano: $R = R_1 \times R_2$

- faz a concatenação de cada tuplo t_1 de R_1 com cada tuplo t_2 de R_2 e coloca o tuplo $t_1 t_2$ em R .

Theta Join: $R = R_1 \bowtie_c R_2$

- é equivalente a: $R = \sigma_c(R_1 \times R_2)$

Natural Join: $R = R_1 \bowtie R_2$

- é equivalente a um theta join em que a condição c diz que os atributos com o mesmo nome são igualados. Depois, uma das colunas é projectada.

Produto Cartesiano (×)

Filmes

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Pocahontas	1998	Disney
King Kong	1933	MGM
Lion King	1997	Disney

Estúdios

nome	morada
Fox	Elm St.
Disney	Pine St.
MGM	Oak Dr.

Produto Cartesiano

Filmes × Estúdios

Filmes.nome	ano	estúdio	Estúdios.nome	morada
Star Wars	1977	Fox	Fox	Elm St.
Star Wars	1977	Fox	Disney	Pine St.
Star Wars	1977	Fox	MGM	Oak Dr.
Pocahontas	1998	Disney	Fox	Elm St.
Pocahontas	1998	Disney	Disney	Pine St.
Pocahontas	1998	Disney	MGM	Oak Dr.
King Kong	1933	MGM	Fox	Elm St.
King Kong	1933	MGM	Disney	Pine St.
King Kong	1933	MGM	MGM	Oak Dr.
Lion King	1997	Disney	Fox	Elm St.
Lion King	1997	Disney	Disney	Pine St.
Lion King	1997	Disney	MGM	Oak Dr.

Theta Join (\bowtie_c)

Filmes

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Pocahontas	1998	Disney
King Kong	1933	MGM
Lion King	1997	Disney

Estúdios

nome	morada
Fox	Elm St.
Disney	Pine St.
MGM	Oak Dr.

Filmes \bowtie Filmes.estúdio=Estúdios.nome Estúdios

Filmes.nome	ano	estúdio	Estúdios.nome	morada
Star Wars	1977	Fox	Fox	Elm St.
Pocahontas	1998	Disney	Disney	Pine St.
King Kong	1933	MGM	MGM	Oak Dr.
Lion King	1997	Disney	Disney	Pine St.

Natural Join (⋈)

Filmes

nome	ano	estúdio
Star Wars	1977	Fox
Pocahontas	1998	Disney
King Kong	1933	MGM
Lion King	1997	Disney

Estúdios

estúdio	morada
Fox	Elm St.
Disney	Pine St.
MGM	Oak Dr.

Filmes ⋈ Estúdios

nome	ano	estúdio	morada
Star Wars	1977	Fox	Elm St.
Pocahontas	1998	Disney	Pine St.
King Kong	1933	MGM	Oak Dr.
Lion King	1997	Disney	Pine St.

Mudar o nome a relações e atributos (ρ)

Notação: $\rho_{S(A_1, A_2, \dots, A_n)}(R)$

- produz uma relação de nome S idêntica a R e com os atributos chamados A_1, A_2, \dots, A_n

Estúdios

estúdio	morada
Fox	Elm St.
Disney	Pine St.
MGM	Oak Dr.

$\rho_{S(\text{nome}, \text{rua})}(\text{Estúdios})$

nome	rua
Fox	Elm St.
Disney	Pine St.
MGM	Oak Dr.

Notação linear para expressões

- A ideia é atribuir nomes para relações intermédias.
- Exemplo: Dado o esquema relacional,

Filmes(nome, ano, duração, aCores, estúdio)
Participa(nomeFilme, anoFilme, nomeActor)

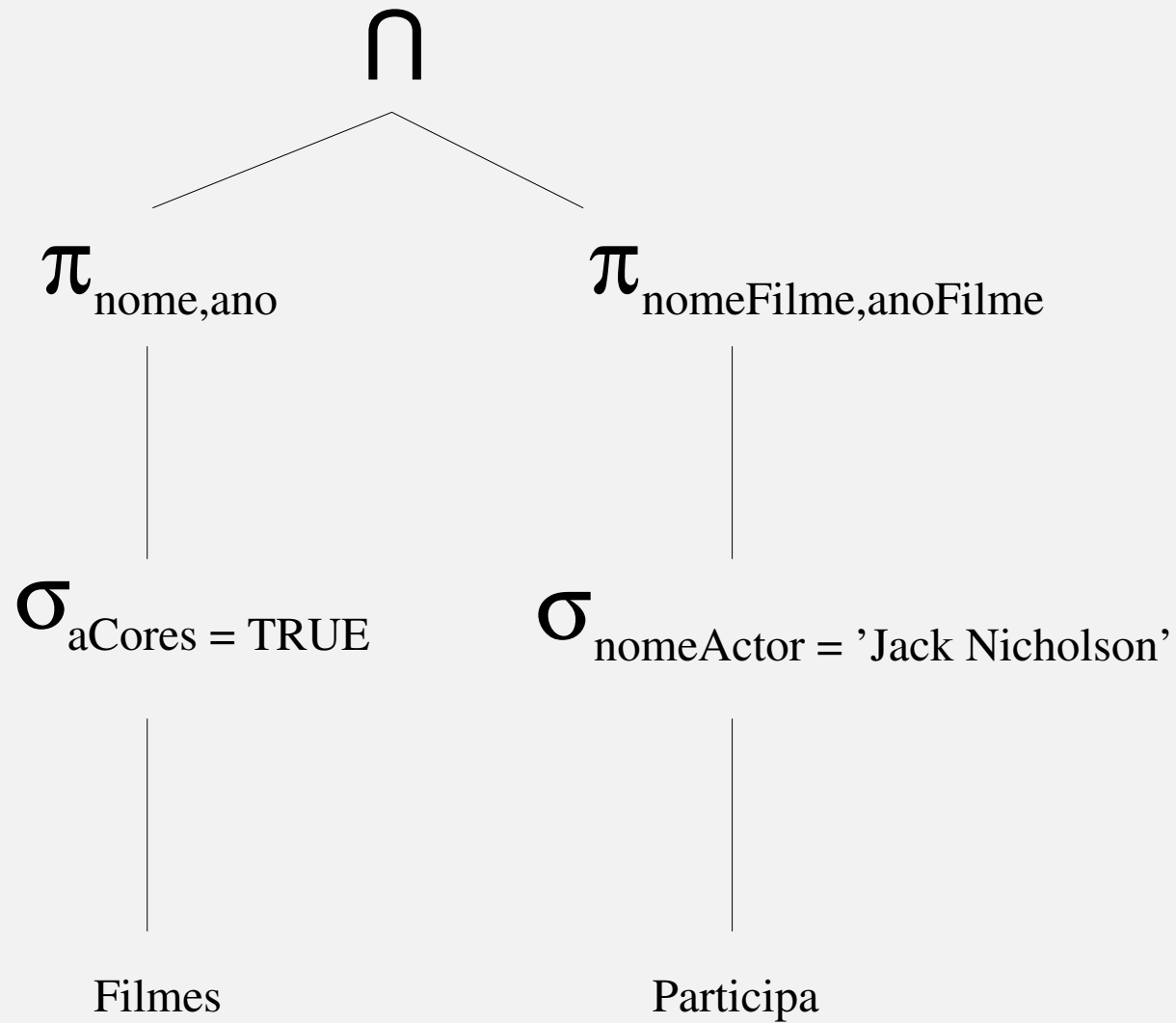
Qual o nome e ano dos filmes a cores em que participou 'Jack Nicholson'?

$$R_1 := \pi_{\text{nome,ano}} \left(\sigma_{\text{aCores} = \text{TRUE}} (\text{Filmes}) \right)$$

$$R_2 := \pi_{\text{nomeFilme,anoFilme}} \left(\sigma_{\text{nomeActor} = \text{'Jack Nicholson'}} (\text{Participa}) \right)$$

$$R_3 := R_1 \cap R_2$$

Expressões em forma de árvore



Restrições em relações

R não tem tuplos.

- $R = \emptyset$

Todo o tuplo de R também é tuplo de S .

- $R \subseteq S$
- $R \subseteq S \equiv R - S = \emptyset$

Pergunta: Qual o significado de,

- $\pi_{\text{estúdio}}(\text{Filmes}) \subseteq \pi_{\text{nome}}(\text{Estúdios})$

Exercício

Actores(nome, morada)

nome	morada
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood
...	...

Quais os actores que partilham a mesma morada? Isto é, pretende-se obter uma relação com dois atributos, *nome1* e *nome2*, em que cada tuplo representa um par de actores com a mesma morada.

nome1	nome2
Angelina Jolie	Brad Pitt
...	...

Exercício (cont.)

- Só com projecções e selecções não vamos lá ...
- Necessitamos de comparar as moradas de actores diferentes e verificar se são iguais.
- Alguma ideia?

Exercício (cont.)

- A solução reside em combinar a relação Actores com ela própria.
 - ▶ obtemos uma cópia da relação Actores através do operador ρ .
 - ▶ fazemos um join de Actores com a cópia obtida, colocando como condição que os actores tenham a mesma morada (mas que se tratem de actores diferentes).
 - ▶ e depois projectamos os atributos nome1 e nome2

ρ Actores2(nome2, morada2) (Actores)

σ morada=morada2 \wedge nome \neq nome2 (Actores \times Actores2)

π nome,nome2 (...

“Debugging” passo a passo

Actores(nome, morada)

nome	morada
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood

ρ Actores2(nome2, morada2) (Actores)

nome2	morada2
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood

“Debugging” passo a passo (cont.)

Actores × Actores2

nome	morada	nome2	morada 2
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood

“Debugging” passo a passo (cont.)

σ morada=morada2 (Actores \times Actores2)

nome	morada	nome2	morada 2
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood

“Debugging” passo a passo (cont.)

σ morada=morada2 \wedge nome \neq nome2 (Actores \times Actores2)

nome	morada	nome2	morada 2
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Nicole Kidman	26 Palm Dr., Hollywood
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Brad Pitt	12 Oak St., Hollywood
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Harrison Ford	789 Palm Dr., Beverly Hills
Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood	Angelina Jolie	12 Oak St., Hollywood

“Debugging” passo a passo (cont.)

$\pi_{\text{nome1}, \text{nome2}} \left(\sigma_{\text{morada}=\text{morada2} \wedge \text{nome} \neq \text{nome2}} (\text{Actores} \times \text{Actores2}) \right)$

nome	nome2
Brad Pitt	Angelina Jolie
Angelina Jolie	Brad Pitt

Podemos fazer com que o mesmo par só apareça uma vez, colocando $\text{nome1} < \text{nome2}$ (ou $\text{nome1} > \text{nome2}$) em vez de $\text{nome1} \neq \text{nome2}$.

“Debugging” passo a passo (cont.)

- Para não termos expressões muito compridas, é útil utilizarmos a notação linear com relações intermédias.

$\text{Actores2}(\text{nome2}, \text{morada } 2) := \text{Actores}$

$\text{Temp} := \sigma_{\text{morada}=\text{morada2} \wedge \text{nome}<\text{nome2}} (\text{Actores} \times \text{Actores2})$

$\text{Resultado} := \pi_{\text{nome}, \text{nome2}} (\text{Temp})$

Operações sobre sacos (*bags*)

- Um conjunto não tem elementos repetidos.
- Um saco pode ter.
- Em ambos os casos a ordem dos elementos não interessa.
 - ▶ $\{1,2,3\} = \{3,1,2\}$.
 - ▶ $\{1,1,2,3,1,3\} = \{3,2,1,1,3,1\}$.

União, intersecção, e diferença de sacos

Se R e S são sacos, e um tuplo t ocorre n vezes em R e m vezes em S , então:

- t ocorre $n + m$ vezes em $R \cup S$.
- t ocorre $\min(n, m)$ vezes em $R \cap S$.
- t ocorre $\max(0, n - m)$ vezes em $R - S$.

Exemplos

R

A	B
1	2
3	4
1	2
1	2

S

A	B
1	2
3	4
3	4
5	6

$R \cup S$

A	B
1	2
3	4
1	2
1	2
1	2
3	4
3	4
5	6

$R \cap S$

A	B
1	2
3	4

$R - S$

A	B
1	2
1	2

Projecção de sacos

R

A	B	C
1	2	5
3	4	6
1	2	7
1	2	8

$\pi_{A,B}(R)$

A	B
1	2
3	4
1	2
1	2

Porquê sacos em vez de conjuntos?

- Operadores podem ser implementados de forma mais eficiente.
- Exemplo: Projecção. (SGBD não necessita de verificar a existência de tuplos repetidos).
- Podemos querer calcular médias ou somas (ou outro tipo de estatística) aos componentes de um atributo.

Seleção, produto cartesiano, joins

Idêntico ao caso de conjuntos.

R

A	B
1	2
1	2

S

B	C
2	3
4	5
4	5

$R \times S$

A	R.B	S.B	C
1	2	2	3
1	2	4	5
1	2	4	5
1	2	2	3
1	2	4	5
1	2	4	5

$R \bowtie_{R.B < S.B} (S)$

A	R.B	S.B	C
1	2	4	5
1	2	4	5
1	2	4	5
1	2	4	5

Operadores extendidos de álgebra relacional

- 1 Eliminação de tuplos repetidos.
- 2 Operadores de agregação (utilizados juntamente com o operador de agrupamento).
- 3 Agrupamento de tuplos.
- 4 Projecção extendida.
- 5 Ordenação.
- 6 Outerjoin.

Eliminação de repetidos (δ)

Converte um saco de tuplos num conjunto de tuplos.

R

A	B
1	2
3	4
1	2
1	2

$\delta(R)$

A	B
1	2
3	4

Operadores de agregação

1 SUM

2 AVG

3 MIN e MAX

- ▶ pode ser aplicado a valores numéricos ou a strings de caracteres (MIN=1º, MAX=último, na ordem lexicográfica)

4 COUNT

- ▶ número de valores de uma coluna (incluindo repetidos).

Exemplos

R

A	B
1	2
3	4
1	2
1	2

$$\text{SUM}(B) = 2+4+2+2 = 10$$

$$\text{AVG}(A) = (1+3+1+1)/4 = 1.5$$

$$\text{MIN}(A) = 1$$

$$\text{MAX}(A) = 3$$

$$\text{COUNT}(A) = 4$$

Agrupamento de tuplos (γ)

- Cria grupos de acordo com o valor de um ou mais atributos.
- Pode-se aplicar agregações (SUM, AVG, MAX, ...) a cada grupo.
- Forma geral: $\gamma_L(R)$.
- L é uma lista de elementos, em que cada qual pode ser:
 - ▶ um atributo de R (sobre o qual R será agrupado).
 - ▶ uma agregação aplicada a um atributo de R .

Como funciona?

A relação obtida $\gamma_L(R)$ é obtida por:

- 1 separando os tuplos de R em grupos (um grupo para todos os tuplos que tenham os mesmos valores nos atributos agrupados).
- 2 para cada grupo, produzir um tuplo que consiste em:
 - ▶ os valores dos atributos agrupados para esse grupo, e
 - ▶ as agregações, relativas a cada grupo, para cada operador de agregação que conste em L .

Exemplo

Filmes

nome	ano	duração	aCores	estúdio
Lion King	1994	122	true	Disney
Total Recall	1990	110	true	Fox
Pocahontas	1995	115	true	Disney
Return of the Jedi	1983	165	true	Fox
Gone With the Wind	1939	181	false	Paramount
Dances with Wolves	1990	132	true	Fox

Número de filmes feito por estúdio.

γ estúdio, COUNT(nome) \rightarrow 'num. filmes' (Filmes)

estúdio	num. filmes
Disney	2
Fox	3
Paramount	1

Como funciona?

nome	ano	duração	aCores	estúdio
Lion King	1994	122	true	Disney
Pocahontas	1995	115	true	Disney
Total Recall	1990	110	true	Fox
Return of the Jedi	1983	165	true	Fox
Dances with Wolves	1990	132	true	Fox
Gone With the Wind	1939	181	false	Paramount

- COUNT(nome) é aplicado a cada grupo.

Outro exemplo

Filmes

nome	ano	duração	aCores	estúdio
Lion King	1994	122	true	Disney
Total Recall	1990	110	true	Fox
Pocahontas	1995	115	true	Disney
Return of the Jedi	1983	165	true	Fox
Gone With the Wind	1939	181	false	Paramount
Dances with Wolves	1990	132	true	Fox

Duração mínima e máxima dos filmes feitos por cada estúdio num determinado ano.

γ estúdio, ano, MIN(duração) \rightarrow 'dur. mínima', MAX(duração) \rightarrow 'dur. máxima' (Filmes)

estúdio	ano	dur. mínima	dur. máxima
Disney	1994	122	122
Disney	1995	115	115
Fox	1983	165	165
Fox	1990	110	132
Paramount	1939	181	181

Como funciona?

nome	ano	duração	aCores	estúdio
Lion King	1994	122	true	Disney
Pocahontas	1995	115	true	Disney
Return of the Jedi	1983	165	true	Fox
Total Recall	1990	110	true	Fox
Dances with Wolves	1990	132	true	Fox
Gone With the Wind	1939	181	false	Paramount

- grupos são feitos para cada par de valores distintos em (estúdio,ano).
- para cada grupo, calcula-se MIN(duração) e MAX(duração).

Projecção extendida, $\pi_L(R)$

Cada elemento de L pode ser:

- 1 Um atributo de R .
- 2 Uma expressão $x \rightarrow y$
(em que x e y são nomes de atributos, equivalente a um “rename” de x para y).
- 3 Uma expressão $E \rightarrow z$
(em que E pode envolver atributos de R , constantes, e operadores aritméticos e de strings).

Exemplo

R

A	B	C
0	1	2
0	1	2
3	4	5

$\pi_{A, B+C \rightarrow X}(R)$

A	X
0	3
0	3
3	9

Ordenação, $\tau_L(R)$

- Converte R para uma lista ordenada segundo os atributos especificados na lista L .
- Exemplo: $\tau_{B,C}(R)$ ordena os tuplos de R por B , e em caso de empate por C .

R

A	B	C
5	3	5
8	1	7
3	4	5
8	1	0
3	4	3
2	1	0

$\tau_{B,C}(R)$

A	B	C
8	1	0
2	1	0
8	1	7
5	3	5
3	4	3
3	4	5

Outerjoin (\bowtie°)

- Adiciona ao output tuplos que falham a condição de join.
- Esses tuplos ficam com o símbolo null (\perp) nos atributos que não possuem.
- Existem variantes: Outer Join, Left Outer Join, Right Outer Join.

Exemplo

U

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

V

B	C	D
2	3	10
2	3	11
6	7	12

$U \overset{\circ}{\bowtie} V$

A	B	C	D
1	2	3	10
1	2	3	11
4	5	6	\perp
7	8	9	\perp
\perp	6	7	12

Left e Right Outerjoin ($\overset{\circ}{\bowtie}_L$ e $\overset{\circ}{\bowtie}_R$)

U

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

V

B	C	D
2	3	10
2	3	11
6	7	12

$U \overset{\circ}{\bowtie}_L V$

A	B	C	D
1	2	3	10
1	2	3	11
4	5	6	⊥
7	8	9	⊥

$U \overset{\circ}{\bowtie}_R V$

A	B	C	D
1	2	3	10
1	2	3	11
⊥	6	7	12